INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Pinhais

Bacharelado em Ciência da Computação

Análise Numérica — 24 de março de 2026

Prova 1 — v2.0

Nome: ____

Instruções

- A prova é individual e sem consulta.
- A interpretação do enunciado é parte da resposta.
- Não é permitido o uso de qualquer dispositivo eletrônico.
- As respostas devem ser escritas a caneta azul ou preta.

1. Encontre uma raiz para a equação $-3x^3 + 6x^2 + x - 1$ (dica: use o intervalo $[-5, 5]$), usando um dos métodos estudados em sala. Escreva claramente: (i) qual método utilizou, (ii) aproximações iniciais e porque elas fazem sentido, (iii) erro calculado em cada iteração do método, (iv) valores intermediários em cada iteração do método. Use no máximo 7 iterações e tolerância $\epsilon < 0.001$. ⟨30 pontos⟩

2. Considere o sistema a seguir para responder os itens abaixo, usando uma precisão de 3 casas decimais.

$$\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - \quad 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 0.1x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

(a) Efetue a decomposição do sistema nas matrizes L e U. ⟨30 pontos⟩

(b) Usando a fatoração LU calculada no item acima, calcule a solução do sistema. ⟨10 pontos⟩

3. Explique porque evitamos usar comparações de igualdade nos métodos que implementamos em sala. Em outras palavras, explique qual o problema do código abaixo para verificar se achamos a resposta correta. Como resolvemos esse problema? ⟨10 pontos⟩

```
// ... codigo do metodo implementado

if (f(x) == 0)
      return x;

// ... codigo do metodo implementado
```

4. Nos métodos baseados na eliminação de Gauss, o pivoteamento parcial consiste em escolher como pivô a linha com maior valor absoluto na coluna que está sendo operada. Para isso, efetua-se uma troca de equações, de forma que o maior elemento da coluna seja o pivô do próximo passo da eliminação de Gauss. Isso é importante para evitar cancelamentos catastróficos de ponto flutuante, em operações envolvendo números muito grandes e muito pequenos na mesma operação. Considere a seguinte implementação do método da eliminação de Gauss e altere o código abaixo para efetuar o pivoteamento parcial. Você não precisa reescrever todo o código, apenas indicar quais linhas serão alteradas, inseridas ou removidas, além de indicar como devem ser as alterações. ⟨30 pontos⟩

```
1  // sistema linear n x n
2  void eliminacaoGauss(double **A, double *b, int n) {
3          for (int k = 0; k < n; ++k) {
4                  // linhas abaixo do pivo
5                  for (int i = k + 1; i < n; ++i) {
6                          double m = A[i][k] / A[k][k];
7  
8                          b[i] = b[i] - m * b[k];
9  
10                         A[i][k] = 0.0;
11                         for (int j = k + 1; j < n; ++j)
12                                 A[i][j] = A[i][j] - m * A[k][j];
13                 }
14         }
15 }
```

1

Método da bisseção

Pelo enunciado, sabemos que o intervalo $[-5 ; 5]$ contém uma ou mais raízes.

Podemos tentar chutar -5 e 0 para já tentar reduzir o espaço de busca: → atenção, existem outras aproximações válidas!

$x = -5 \Rightarrow -3\cdot(-5)^3 + 6\cdot(-5)^2 + (-5) - 1 = 519 \qquad (-5 ; 519)$

$x = 0 \Rightarrow -3\cdot(0)^3 + 6\cdot(0)^2 + (0) - 1 = -1 \qquad (0 ; -1)$

x	-5	0
$f(x)$	519	-1
	$+$	$-$

O sinal troca ⇒ podemos usar essa aproximação inicial!

Iteração 0:

* $a = -5 \qquad f(a) = 519$
* $b = 0 \qquad f(b) = -1$

* $x = \dfrac{a+b}{2} = -2,5$ → ponto médio do intervalo

* $f(x) = -3\cdot(-2,5)^3 + 6\cdot(-2,5)^2 + (-2,5) - 1 = 80,075$

* Erro absoluto: $|b - a| = |0 - 5| = 5$

→ $5 > 0,001$ → tolerância do enunciado

Devemos continuar!

x	-5	$-2{,}5$	0
$f(x)$	519	$80{,}075$	-1
	$+$	$+$	$-$

Vamos usar esse subintervalo!

↳ metade da direita

OU $f(a) \cdot f(x) = 519 \cdot 80{,}075 > 0$, então:

$b = b$
$a = x$

Iteração 1

* $a = -2{,}5$ $\quad f(a) = 80{,}075$
* $b = 0$ $\quad f(b) = -1$

* $x = -1{,}25$ $\quad f(x) = 12{,}98438$

* Erro: $|b - a| = 2{,}5 > 0{,}001 \rightarrow$ continuar!
* $f(a) \cdot f(x) > 0$, então $b = b$, $a = x$

Iteração 2

* $a = -1{,}25$ $\quad f(a) = 12{,}98438$
* $b = 0$ $\quad f(b) = -1$

* $x = -0{,}625$ $\quad f(x) = 1{,}45117$

* Erro $= 1{,}25 > 0{,}001 \rightarrow$ continuar!
* $f(a) \cdot f(x) > 0$, então $b = b$, $a = x$

Iteração 3

* $a = -0,625$ $\quad f(a) = 1,45117$
* $b = 0$ $\quad f(b) = -1$

* $x = -0,3125$ $\quad f(x) = -0,63501$

* Erro $= 0,625 > 0,001 \rightarrow$ continuar!
* $f(a) \cdot f(x) < 0$, então $\left. \begin{matrix} b = x \\ a = a \end{matrix} \right|$ $\rightsquigarrow$ usaremos a parte da esquerda do intervalo

Iteração 4

* $a = -0,625$ $\quad f(a) = 1,45117$
* $b = -0,3125$ $\quad f(b) = -0,63501$

* $x = -0,46875$ $\quad f(x) = 0,1586$

* Erro $= 0,3125 > 0,001 \rightarrow$ continuar!
* $f(a) \cdot f(x) > 0$, então $\left. \begin{matrix} b = b \\ a = x \end{matrix} \right|$

Iteração 5

* $a = -0,46875$ $\quad f(a) = 0,1586$
* $b = -0,3125$ $\quad f(b) = -0,63501$

* $x = -0,39062$ $\quad f(x) = -0,29628$

* Erro $= 0,15625 > 0,001 \rightarrow$ continuar!
* $f(a) \cdot f(x) < 0$, então $\left. \begin{matrix} b = x \\ a = a \end{matrix} \right|$

Iteração 6

* $a = -0,46875$ $f(a) = 0,1586$
* $b = -0,39062$ $f(b) = -0,29628$

* $x = -0,42969$ $f(x) = -0,0839$

* Erro $= 0,07812 > 0,001 \rightarrow$ continuar!

Mas já fizemos 7 iterações, conforme o enunciado. Então vamos parar!

$$\boxed{x = -0,42969}$$

Resumo do método da bisseção:

Calculando raiz de f(x) com precisão 0.00100 e 7 iterações

Iteracao	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	|b - a|
0	-5.00000	0.00000	-2.50000	519.00000	-1.00000	80.87500	5.00000
1	-2.50000	0.00000	-1.25000	80.87500	-1.00000	12.98438	2.50000
2	-1.25000	0.00000	-0.62500	12.98438	-1.00000	1.45117	1.25000
3	-0.62500	0.00000	-0.31250	1.45117	-1.00000	-0.63501	0.62500
4	-0.62500	-0.31250	-0.46875	1.45117	-0.63501	0.15860	0.31250
5	-0.46875	-0.31250	-0.39062	0.15860	-0.63501	-0.29628	0.15625
6	-0.46875	-0.39062	-0.42969	0.15860	-0.29628	-0.08390	0.07812

A raiz é -0.42969 => f(x) = -0.08390

Método da secante

Como este método converge mesmo com aproximações iniciais "ruins", vamos usar os extremos do intervalo dado pelo enunciado: -5 e 5.

Iteração 0

* $x_0 = -5 \qquad f(x_0) = 519$
* $x_1 = 5 \qquad f(x_1) = -221$

Conforme deduzimos em sala: → semelhança de triângulos no gráfico

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)\cdot x_{k-1} - f(x_{k-1})\cdot x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Então:

$$x_2 = \frac{f(x_1)\cdot x_0 - f(x_0)\cdot x_1}{f(x_1) - f(x_0)}$$

* $$x_2 = \frac{-221\cdot(-5) - 519\cdot 5}{-221 - 519}$$

$$\underline{x_2 = 2{,}01351}$$

* $f(x_2) = 0{,}84915$

* Erro absoluto:
  - $|f(x_2)| = 0{,}84915 > 0{,}001$ → estamos longe da raiz!
  - $|x_2 - x_1| = 2{,}98649 > 0{,}001$ → fizemos progresso!

  } continuar

Iteração 1

* $x_1 = 5 \qquad f(x_1) = -221$
* $x_2 = 2{,}01351 \qquad f(x_2) = 0{,}84915$

* $$x_3 = \frac{f(x_2)\cdot x_1 - f(x_1)\cdot x_2}{f(x_2) - f(x_1)} = 2{,}02494 \qquad f(x_3) = 0{,}7181$$

* Erro:

$$\left.\begin{array}{l} - |f(x_3)| = 0{,}7181 > 0{,}001 \rightarrow \text{estamos longe da raiz!} \\ - |x_3 - x_2| = 0{,}01143 > 0{,}001 \rightarrow \text{fizemos progresso!} \end{array}\right\} \text{continuar}$$

Iteração 2

* $x_2 = 2{,}01351 \qquad f(x_2) = 0{,}84915$
* $x_3 = 2{,}02494 \qquad f(x_3) = 0{,}7181$

* $x_4 = 2{,}08758 \qquad f(x_4) = -0{,}05742$
* Erro:

$$\left.\begin{array}{l} - |f(x_3)| = 0{,}05742 > 0{,}001 \rightarrow \text{estamos longe da raiz!} \\ - |x_3 - x_2| = 0{,}06263 > 0{,}001 \rightarrow \text{fizemos progresso!} \end{array}\right\} \text{continuar}$$

Iteração 3

* $x_3 = 2,02494$ $\quad f(x_3) = 0,7181$
* $x_4 = 2,08758$ $\quad f(x_4) = -0,05742$

* $x_5 = 2,08294$ $\quad f(x_5) = 0,00339$
* Erro:

- $|f(x_3)| = 0,00339 > 0,001$ → estamos longe da raiz!
- $|x_3 - x_2| = 0,00464 > 0,001$ → fizemos progresso!

continuar

Iteração 4

* $x_4 = 2,08758$ $\quad f(x_4) = -0,05742$
* $x_5 = 2,08294$ $\quad f(x_5) = 0,00339$

* $x_6 = 2,0832$ $\quad f(x_6) = 0,00001$
* Erro:

- $|f(x_3)| = 0,00001 < 0,001$ → estamos perto da raiz!
- $|x_3 - x_2| = 0,00026 < 0,001$ → fizemos mudança pequena!

parar!

$$\boxed{x = 2,0832}$$

Resumo do método da secante:

Calculando raiz de f(x) com precisão 0.00100 e 7 iterações

Iteracao	old_x	x	f(old_x)	f(x)	new_x	f(new_x)	|new_x - x|
0	-5.00000	5.00000	519.00000	-221.00000	2.01351	0.84915	2.98649
1	5.00000	2.01351	-221.00000	0.84915	2.02494	0.71810	0.01143
2	2.01351	2.02494	0.84915	0.71810	2.08758	-0.05742	0.06263
3	2.02494	2.08758	0.71810	-0.05742	2.08294	0.00339	0.00464
4	2.08758	2.08294	-0.05742	0.00339	2.08320	0.00001	0.00026

A raiz é 2.08320 => f(x) = 0.00001

(2)

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -0,1 & -1 \end{bmatrix}$$

Precisamos eliminar a_{21}:

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$$

$$* \; 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

$$* \; -2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = -3/2$$

$$* \; 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1/2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -0,1 & -1 \end{bmatrix}$$

Guardar o multiplicador!

$\hookrightarrow 1/2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \boxed{1/2} & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -0,1 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora precisamos eliminar a_{31}:

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} \cdot L_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 2/5 & -3/2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2/5 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Guardar o multiplicador!

Agora precisamos eliminar a_{32}: $L_3 \leftarrow L_3 - \left(\frac{-4}{15}\right) \cdot L_2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -4/15 & -41/30 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -4/15 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -41/30 \end{bmatrix}$$

b)

i) $Ly = b$

Substituição:

$$\begin{cases} y_1 = -1 \\ \frac{y_1}{2} + y_2 = 1 \\ \frac{y_1}{2} - \frac{4y_2}{15} + y_3 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow y_1 = -1$

$\Rightarrow y_2 = 1 - \frac{(-1)}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow y_3 = 3 - \frac{(-1)}{2} + \frac{4 \cdot 3}{15 \cdot 2}$

$y_3 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{12}{30} = \frac{90 + 15 + 12}{30}$

$y_3 = \frac{117}{30} = \frac{39}{10}$

$$y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 39/10 \end{pmatrix}$$

ii) $Ux = y$

$$\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 = -1 \\ -3/2 x_2 + 1/2 x_3 = 3/2 \\ -41/30 x_3 = 39/10 \end{cases}$$

Retrosubstituição!

* $$x_3 = \frac{39}{10}\cdot\left(-\frac{30}{41}\right) = -\frac{117}{41}$$

* $$-\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{117}{41}\right) = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}x_2 = \frac{3}{2} + \frac{117}{82}$$

$$-\frac{3x_2}{2} = \frac{123+117}{82}$$

$$-\frac{3x_2}{2} = \frac{240}{82}$$

$$x_2 = -\frac{240\cdot 2}{82\cdot 3} = -\frac{480}{246} = -\frac{80}{41}$$

* $$2x_1 - \left(-\frac{80}{41}\right) + \left(-\frac{117}{41}\right) = -1$$

$$2x_1 + \frac{80}{41} - \frac{117}{41} = -1$$

$$2x_1 - \frac{37}{41} = \frac{-41}{41}$$

$$2x_1 = \frac{-41+37}{41}$$

$$2x_1 = \frac{-4}{41}$$

$$x_1 = \frac{-4}{41 \cdot 2} = -\frac{2}{41}$$

A solução é $x = \begin{pmatrix} -2/41 \\ -80/41 \\ -117/41 \end{pmatrix}$

3) O problema é que a condição $f(x) == 0$ pode nunca ser verdadeira por conta dos problemas de representação e erros de cálculo de ponto flutuante.

A solução é verificar se a resposta está dentro de uma determinada tolerância/precisão:

if(f(x) < 0,001)   if(f(x) < tol)   if (fabs(f(x)) < tol)

4

Inserir na linha 4:

```
double    max = A[k][k];
int       max_index = k;

for (i=k+1; i<n; i++) {
        if (fabs(A[i][k]) > fabs(max)) {
                max = A[i][k];
                max_index = i;
        }
}
double * temp = A[max_index];
A[max_index] = A[k];
A[k] = temp;
```